УДК 514.76

Г. А. Султанова

О ГОРИЗОНТАЛЬНО-ВЕКТОРНЫХ ПОДНЯТИЯХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ С БАЗЫ В ЕЕ КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

Векторное поле типа $G^{H\gamma}$, полученное из тензорного поля $G \in \Im_1^1(M)$, заданного на гладком многообразии M в касательное расслоение $T(M)$, возникает при инфинитезимальных аффинных преобразованиях со связностью полного лифта. Hγ-лифт был введен С. Танно в 1974 г. при изучении инфинитезимальных изометрий на касательном расслоении с метрикой полного лифта. Определение Hγ′-лифта ($r \geqslant 2$) дано в настоящей работе. Установлены свойства введенного лифта, а также найден коммутатор $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}]$, где $P, G \in \Im_1^1(M)$.

The vector field of the type $G^{H\gamma}$, obtained from the tensor field $G \in \Im_1^1(M)$ on a smooth manifold M to the tangent bundle $T(M)$, arises in the study of infinitesimal affine transformations with a complete lift. The Hγ-lift was introduced S. Tanno in 1974 in infinitesimal isometries on the tangent bundle with the complete lift. The definition of Hγ′-lift given by the author in this paper. There are established the properties of the entered lift and founded the commutator $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}]$, where $P, G \in \Im_1^1(M)$.

Ключевые слова: гладкое многообразие, касательное расслоение, лифты тензорных полей, тензорное поле, коммутатор векторных полей.

Key words: smooth manifold, the tangent bundle, lifts of tensor fields, tensor field, commutator of vector fields.

1. Необходимые сведения

Пусть M — связное дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n, $T_P(M)$ — касательное пространство к нему в точке $P \in M$, то есть множество всех касательных векторов многообразия M в точке P. Тогда множество

$$T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P(M)$$

называется *касательным расслоением над многообразием M*.

Отображение $\pi : T(M) \to M$, определенное условием $\pi(t_x) = x$, $t_x \in T(M)$, называется *канонической проекцией*. Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется *вертикальным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение* $T(M)$. На $T(M)$ возникает естественная структура гладкого многообразия над полем действительных чисел, атлас которого состоит из координатных окрестностей $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$. Закон преобразования координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)$ имеет вид [6, с. 2]:

$$\begin{cases} \overline{x}_0^i = \overline{x}_0^i(x_0^1, ..., x_0^n), \\ \overline{x}_1^i = \left(\dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\right)_{(0)} x_1^k. \end{cases} \tag{1.1}$$

Формулы второй группы системы (1.1) допускают обобщение, имеющее приложения.

Лемма 1. *Пусть K – тензорное поле типа (1, r), заданное на M. Закон преобразования объекта, заданного на T(M) компонентами* $(K^i_{j_1 j_2 ... j_r})_{(0)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} ... x_r^{j_r}$ *:*

$$(K^i_{j_1 j_2 ... j_r})_{(0)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} ... x_r^{j_r} = \left(\overline{K}^q_{k_1 k_2 ... k_r}\right)_{(0)} \cdot \overline{x}_1^{k_1} \cdot ... \cdot \overline{x}_r^{k_r} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^q}\right)_{(0)}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Предположим, что $(\pi^{-1}(V), \overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)$ – другая локальная карта, такая, что $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \varnothing$. Используя формулы (1.1) и закон преобразования компонент тензора произвольного ранга, получим

$$(K^i_{j_1 j_2 ... j_r})_{(0)} x_1^{j_1} x_2^{j_2} ... x_1^{j_r} = \left(\overline{K}^q_{s_1 s_2 ... s_r} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^q} \frac{\partial \overline{x}^{s_1}}{\partial x^{j_1}} ... \frac{\partial \overline{x}^{s_r}}{\partial x^{j_r}}\right)_{(0)} \cdot \left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial \overline{x}^{k_1}}\right)_{(0)} \overline{x}_1^{k_1} \cdot ... \cdot \left(\frac{\partial x^{j_r}}{\partial \overline{x}^{k_r}}\right)_{(0)} \overline{x}_1^{k_r} =$$

$$= \left(\overline{K}^q_{s_1 s_2 ... s_r} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^q} \cdot \frac{\partial \overline{x}^{s_1}}{\partial x^{j_1}} \cdot ... \cdot \frac{\partial \overline{x}^{s_r}}{\partial x^{j_1}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \overline{x}^{k_1}} \cdot ... \cdot \frac{\partial x^{j_r}}{\partial \overline{x}^{k_r}}\right)_{(0)} \cdot \overline{x}_1^{k_1} \cdot ... \cdot \overline{x}_1^{k_r} =$$

$$= \left(\overline{K}^q_{s_1 s_2 ... s_r} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^q} \cdot \delta^{s_1}_{k_1} \cdot ... \cdot \delta^{s_r}_{k_r}\right)_{(0)} \cdot \overline{x}_1^{k_1} \cdot ... \cdot \overline{x}_1^{k_r} = \left(\overline{K}^q_{k_1 k_2 ... k_r} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^q}\right)_{(0)} \cdot \overline{x}_1^{k_1} \cdot ... \cdot \overline{x}_1^{k_r}.$$

Пусть $(U, x^i), (V, \overline{x}^j)$ – карты гладкого атласа многообразия *M*, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\overline{\partial}_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{x}^j}$ – поля натурального репера на *U* и *V* соответственно. В локальной карте $(U \cap V, x^i)$ имеем $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial \overline{x}^k}$. На $(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V), x_0^i, x_1^i)$ для индуцированных координат на $T(M)$ $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\dfrac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\right)_{(0)} \left(\dfrac{\partial}{\partial \overline{x}^k}\right)^{(1)}$. Тогда для тензорного поля $K \in \mathfrak{I}^1_r(M)$

$$(K^i_{j_1 ... j_r})_{(0)} x_1^{j_1} ... x_1^{j_r} \partial_i^1 = \left(\overline{K}^q_{k_1 ... k_r}\right)_{(0)} \cdot \overline{x}_1^{k_1} \cdot ... \cdot \overline{x}_1^{k_r} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^q} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^i}\right)_{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^s}\right)^{(1)} =$$

$$= (\overline{K}^q_{k_1 ... k_r})_{(0)} \overline{x}_1^{k_1} \cdot ... \cdot \overline{x}_1^{k_r} \overline{\partial}_s^1.$$

Таким образом, выражение $(K^i_{j_1\dots j_r})_{(0)} x_1^{j_1}\dots x_1^{j_r}\partial_i^1 = \gamma^r K$ не зависит от выбора локальной системы координат и является векторным полем.

Определение 1.1. *Векторное поле $\gamma^r K$ называется γ^r-лифтом тензорного поля $K \in \Im_r^1(M)$.*

Приведем определение полного лифта функции, лифтов векторных полей с базы в касательное расслоение, а также полного лифта линейной связности ∇ с базы M в касательное расслоение $T(M)$.

Пусть f — функция класса C^∞, заданная на M. Функция $f_{(1)} = \gamma(df)$ называется *полным лифтом функции* f с базы M в его касательное расслоение $T(M)$.

Для произвольного векторного поля $X \in \Im_0^1(M)$ на $T(M)$ определим вертикальный $X^{(1)}$ и полный $X^{(0)}$ лифты, задаваемые условиями

$$X^{(1)} f_{(1)} = (Xf)_{(0)},\ X^{(1)} f_{(0)} = 0,\ X^{(0)} f_{(\alpha)} = (Xf)_{(\alpha)},\ (\alpha = 0, 1),$$

для любой функции f из алгебры $C^\infty(M)$. В локальных координатах векторные поля $X^{(1)}$, $X^{(0)}$ имеют вид

$$X^{(1)} = X_0^i \partial_i^1,\quad X^{(0)} = X_0^i \partial_i^0 + X_1^i \partial_i^1,$$

где $X_0^i = (X^i)_{(0)}$, $X_1^i = x_1^j(\partial_j X^i)_{(0)}$ соответственно.

Предположим, что на M задана линейная связность ∇. На касательном расслоении $T(M)$ существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условиям

$$\nabla^{(0)}{}_{X^{(0)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)},\ \nabla^{(0)}{}_{X^{(0)}} Y^{(1)} = (\nabla_X Y)^{(1)},\ \nabla^{(0)}{}_{X^{(1)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)},\ \nabla^{(0)}{}_{X^{(1)}} Y^{(1)} = 0, \quad (1.3)$$

где $X, Y \in \Im_0^1(M)$. Такая связность называется *полным лифтом линейной связности* ∇ [2, с. 78; 6, с. 40].

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные связности ∇, тензорное поле кручения которых, определяемое условием $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, равно нулю.

Определение 1.2. *Векторное поле $G^{H\gamma}$, заданное в локальных координатах соотношением*

$$G^{H\gamma} = G_i^j x_1^i \partial_j^H, \quad (1.4)$$

где $G \in \Im_1^1(M)$, а $\partial_j^H = \partial_j^0 - \Gamma_{js}^p x_1^s \partial_p^1$, называется горизонтально-векторным поднятием аффинора G [5, с. 139].

2. $H\gamma\gamma$-лифт тензорного поля типа (1, 2)

В дальнейшем нам потребуются операции свертки для тензорных полей различных типов.

Для тензорных полей $\Phi \in \Im_r^1(M)$ $(r \geqslant 1)$, $X \in \Im_0^1(M)$ определим операцию свертки $\Phi \overset{i}{\circ} X$ по правилу

$$\Phi \overset{i}{\circ} X(X_1, ..., X_{i-1}, \wedge, X_{i+1}, ..., X_r) = \Phi(X_1, ..., X_{i-1}, X, X_{i+1}, ..., X_r) \qquad (2.1)$$

для произвольных $X, X_1, X_2, ..., X_r \in \Im_0^1(M)$, а знак $\wedge$ означает пропущенный аргумент.

В локальных координатах

$$(\Phi \overset{i}{\circ} X)^h_{j_1 ... j_{i-1} j_{i+1} ... j_r} \partial_h = \Phi^h_{j_1 ... j_{i-1}\, i\, j_{i+1} ... j_r} X^i \partial_h \,. \qquad (2.2)$$

Для тензорных полей $\Phi \in \Im_r^1(M)$ $(r \geqslant 1)$, $F \in \Im_s^1(M)$ операции свертки $\Phi \overset{i}{\bullet} F$ зададим по правилу

$$\Phi \overset{i}{\bullet} F(X_1, \ldots, X_r, ..., X_{r+s-1}) = \Phi(X_1, \ldots, X_{i-1}, F(X_r, ..., X_{r+s-1}), X_{i+1}, \ldots, X_{r-1}) \qquad (2.3)$$

для произвольных $X_1, X_2, ..., X_{r+s-1} \in \Im_0^1(M)$.

В естественных координатах (2.3) равносильны соотношениям

$$(\Phi \overset{i}{\bullet} F)^h_{j_1 ... j_{r+s-1}} \partial_h = \Phi^h_{j_1 ... j_{i-1}\, i\, j_{i+1} ... j_{r-1}} F^i_{j_r ... j_{r+s-1}} \partial_h . \qquad (2.4)$$

Докажем, что операция свертки $\overset{i}{\bullet}$ является ассоциативной. Справедлива

Теорема 2.1. *Для любых тензорных полей* $\Phi \in \Im_r^1(M), F \in \Im_s^1(M), P \in \Im_q^1(M)$

$$(\Phi \overset{i}{\bullet} F) \overset{l}{\bullet} P = \Phi \overset{i}{\bullet} (F \overset{l}{\bullet} P) \,. \qquad (2.5)$$

Доказательство проведем прямыми вычислениями в локальных координатах. На основании соотношений (2.4) получим

$$(\Phi \overset{i}{\bullet} F)^h_{j_1 ... j_{r-1} m_1 ... m_s} \partial_h = \Phi^h_{j_1 ... i ... j_{r-1}} F^i_{m_1 ... m_s} \partial_h = \tilde{\Phi}^h_{j_1 ... j_{i-1} j_{i+1} ... j_{r-1} m_1 ... m_s} \partial_h \,,$$

где $\tilde{\Phi}^h_{j_1 ... j_{i-1} j_{i+1} ... j_{r-1} m_1 ... m_s} \partial_h = \Phi^h_{j_1 ... i ... j_{r-1}} F^i_{m_1 ... m_s} \partial_h$.

Компоненты тензорного поля $(\Phi \overset{i}{\bullet} F) \overset{l}{\bullet} P = \tilde{\Phi} \overset{l}{\bullet} P$ по формулам (2.4) будут следующими:

$$\tilde{\Phi} \overset{l}{\bullet} P = \tilde{\Phi}^h_{j_1 ... j_{i-1} j_{i+1} ... j_{r-1} m_1 . m_{l-1} l m_{l+1} .. m_{s-1}} P^l_{n_1 ... n_q} \partial_h = \Phi^h_{j_1 ... i ... j_{r-1}} F^i_{m_1 .... m_{l-1} l m_{l+1} .. m_{s-1}} P^l_{n_1 ... n_q} \partial_h .$$

Рассмотрим компоненты тензорного поля $F \overset{l}{\bullet} P$:

$$(F \overset{l}{\bullet} P)^h_{m_1 ... m_s n_1 ... n_q} \partial_h = F^h_{m_1 ... m_{l-1} l m_{l+1} .. m_{s-1}} P^l_{n_1 ... n_q} \partial_h = \tilde{F}^h_{m_1 ... m_{l-1} m_{l+1} .. m_{s-1}} \partial_h \,,$$

где $\tilde{F}^h_{m_1 ... m_{l-1} m_{l+1} .. m_{s-1}} \partial_h = F^h_{m_1 ... m_{l-1} l m_{l+1} .. m_{s-1}} P^l_{n_1 ... n_q} \partial_h$.

Компоненты тензорного поля $\Phi \overset{i}{\bullet} (F \overset{l}{\bullet} P) = \Phi \overset{i}{\bullet} \tilde{F}$ будут иметь следующий вид:

$$\Phi \overset{i}{\bullet} \tilde{F} = \Phi^h_{j_1 ... j_{i-1} i j_{i+1} ... j_{r-1}} \tilde{F}^i_{m_1 . m_{l-1} m_{l+1} .. m_{s-1} n_1 ... n_q} \partial_h = \Phi^h_{j_1 ... i ... j_{r-1}} F^i_{m_1 .... m_{l-1} l m_{l+1} .. m_{s-1}} P^l_{n_1 ... n_q} \partial_h .$$

Из равенства правой и левой частей тождества следует, что операция свертки $\overset{i}{\bullet}$ является ассоциативной.

Для того чтобы ввести определение $H\gamma\gamma$-лифта, вычислим коммутатор векторных полей $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}]$, где $P, G \in \Im_1^1(M)$. Вычисления проведем, используя равенство (1.4) и естественные локальные координаты на $T(M)$.

$$\begin{gathered}
[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] = [P_i^j x_1^i \partial_j^0 - P_i^j x_1^i \Gamma_{js}^p x_1^s \partial_p^1, G_m^k x_1^m \partial_k^0 - G_m^k x_1^m \Gamma_{kz}^q x_1^z \partial_q^1] = (P_i^j \partial_j G_m^k - \\
- P_i^j \Gamma_{mj}^p G_p^k - G_m^j \partial_j P_i^k + G_m^j \Gamma_{ji}^p P_q^k) x_1^m x_1^i \partial_k^0 + (-P_i^j \partial_j G_m^k + P_i^j \Gamma_{jm}^p G_p^k + G_m^j \partial_j P_i^k - \\
- G_m^j \Gamma_{ji}^p P_q^k) \Gamma_{ks}^q x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1 + P_i^j G_m^k (-\partial_j \Gamma_{ks}^q + \partial_k \Gamma_{js}^q + \Gamma_{js}^p \Gamma_{kp}^q - \Gamma_{ks}^p \Gamma_{jp}^q) x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1 = \\
= (P_i^j \nabla_j G_m^k - G_m^j \nabla_j P_i^k) x_1^m x_1^i (\partial_k^0 - \Gamma_{ks}^q x_1^s \partial_q^1) + P_i^j G_m^k R_{skj}^q x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1 = \\
= (P_i^j \nabla_j G_m^k - G_m^j \nabla_j P_i^k) x_1^m x_1^i \partial_k^H + P_i^j G_m^k R_{skj}^q x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1 = (P_j^m \nabla_m G_k^i - \\
- G_k^m \nabla_m P_j^i) x_1^j x_1^k \partial_i^H + \gamma^3((R(,) \overset{2}{\bullet} G) \overset{3}{\bullet} P).
\end{gathered} \tag{2.6}$$

В данном равенстве набор функций $P_j^m \nabla_m G_k^i - G_k^m \nabla_m P_j^i$ определяет тензорное поле типа $(1, 2)$ на M, которое обозначим через $B_{jk}^i = P_j^m \nabla_m G_k^i - G_k^m \nabla_m P_j^i$. Разность

$$[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] - \gamma^3((R(,) \overset{2}{\bullet} G) \overset{3}{\bullet} P) = B_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^H$$

есть векторное поле на касательном расслоении $T(M)$. Докажем, что вид компонент этого векторного поля не зависит от выбора локальной системы координат.

На $(\pi^{-1}(V), \bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i)$ для индуцированных координат на $T(M)$ получим

$$\partial_i^H = \left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \right)_{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \right)^H. \tag{2.7}$$

Подставляя соотношения (1.1) и (2.7) в $B^{H\gamma\gamma}$, будем иметь

$$\begin{gathered}
B_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^H = (B_{jk}^i)_{(0)} \frac{\partial x_0^j}{\partial \bar{x}_0^a} \bar{x}_1^a \frac{\partial x_0^k}{\partial \bar{x}_0^b} \bar{x}_1^b \left(\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \right)_{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^q} \right)^H = \\
= (B_{jk}^i)_{(0)} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \right)_{(0)} \bar{x}_1^a \bar{x}_1^b \bar{\partial}_q^H = \bar{B}_{ab}^q \bar{x}_1^a \bar{x}_1^b \bar{\partial}_q^H.
\end{gathered}$$

На основании доказанного свойства можно ввести

Определение 2.1. *Векторное поле* $B^{H\gamma\gamma} = B_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^H$ *называется* $H\gamma\gamma$*-лифтом тензорного поля* $B \in \Im_2^1(M)$.

Из соотношений (2.4) и определения $H\gamma\gamma$-лифта получаем, что имеет место

Теорема 2.2. *Для любых* $P, G \in \Im_1^1(M)$

$$[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] = (\nabla G \overset{2}{\bullet} P - \nabla P \overset{2}{\bullet} G)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3((R(,) \overset{2}{\bullet} G) \overset{3}{\bullet} P). \tag{2.7}$$

3. Дальнейшие свойства $H\gamma\gamma$ -лифтов тензорных полей типа (1, 2)

В этом пункте мы будем рассматривать новые свойства $H\gamma\gamma$ -лифтов тензорных полей типа (1, 2).

Справедлива

Теорема 3.1. *Для любых* $X \in \Im_0^1(M), F \in \Im_2^1(M)$:

(1) $L_{X^{(1)}} F^{H\gamma\gamma} = (F \overset{1}{\circ} X + F \overset{2}{\circ} X)^{H\gamma} - \gamma\gamma(\nabla X \overset{1}{\bullet} F)$;

(2) $L_{X^{(0)}} F^{H\gamma\gamma} = (L_X F)^{H\gamma\gamma} - \gamma^3 (L_X \nabla \overset{2}{\bullet} F)$.

Доказательство. Так как $X^{(0)}, X^{(1)}, F^{H\gamma\gamma}$ — векторные поля, то производная Ли $L_{\tilde{X}} F^{H\gamma\gamma} = [\tilde{X}, F^{H\gamma\gamma}]$ вдоль векторного поля $\tilde{X}$ от векторного поля $F^{H\gamma\gamma}$ есть скобка Ли $[\tilde{X}, F^{H\gamma\gamma}]$. В частности, $L_{X^{(0)}} F^{H\gamma\gamma} = [X^{(0)}, F^{H\gamma\gamma}]$ и $L_{X^{(1)}} F^{H\gamma\gamma} = [X^{(1)}, F^{H\gamma\gamma}]$. Из определения коммутатора векторных полей имеем

$$
\begin{aligned}
(1)\ & L_{X^{(1)}} F^{H\gamma\gamma} = [X_0^q \partial_q^1, F_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^0 - F_{jk}^i \Gamma_{is}^p x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1] = \\
& = X_0^q (F_{qk}^i x_1^k \partial_i^0 - F_{qk}^i x_1^k \Gamma_{is}^p x_1^s \partial_p^1 + + F_{kq}^i x_1^k \partial_i^0 - F_{kq}^i x_1^k \Gamma_{is}^p x_1^s \partial_p^1) - F_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^0 X_0^q \partial_q^1 - \\
& - X_0^q F_{jk}^i \Gamma_{iq}^p x_1^j x_1^k \partial_p^1 = X_0^q (F_{qk}^i x_1^k \partial_i^0 - F_{qk}^i x_1^k \Gamma_{is}^p x_1^s \partial_p^1 + F_{kq}^i x_1^k \partial_i^0 - F_{kq}^i x_1^k \Gamma_{is}^p x_1^s \partial_p^1) - \\
& - F_{jk}^i x_1^j x_1^k \nabla_i X_0^q \partial_q^1 = (F \overset{1}{\circ} X + F \overset{2}{\circ} X)^{H\gamma} - \gamma\gamma(\nabla X \overset{1}{\bullet} F).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ & L_{X^{(0)}} F^{H\gamma\gamma} = [X_0^q \partial_q^0 + X_1^q \partial_q^1, F_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^0 - F_{jk}^i \Gamma_{is}^p x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1] = \\
& = X_0^q \partial_q^0 F_{jk}^i x_1^k x_1^j (\partial_i^0 - \Gamma_{is}^p x_1^s \partial_p^1) - X_0^q F_{jk}^i x_1^k x_1^j \partial_q^0 \Gamma_{is}^p x_1^s \partial_p^1 + X_1^q x_1^k (F_{qk}^i + F_{kq}^i) \partial_i^0 - \\
& - X_1^q x_1^j x_1^k (F_{qk}^i \Gamma_{ij}^p + F_{kq}^i \Gamma_{ij}^p + F_{jk}^i \Gamma_{iq}^p) \partial_p^1 - F_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^0 X_0^q \partial_q^0 - F_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^0 X_1^q \partial_q^1 + \\
& + F_{jk}^i x_1^j x_1^k \Gamma_{is}^p x_1^s \partial_p^1 X_1^q \partial_q^1 = (X_0^q \partial_q^0 F_{jk}^i + \partial_j^0 X_0^q F_{qk}^i + \partial_k^0 X_0^q F_{jq}^i - \partial_q^0 X_0^i F_{jk}^q) x_1^j x_1^k \partial_i^H + \\
& + F_{jk}^i (-\partial_i^0 X_0^q \Gamma_{qs}^p - X_0^q \partial_q^0 \Gamma_{is}^p - \partial_s^0 X_0^q \Gamma_{iq}^p - \partial_i^0 \partial_s^0 X_0^p + \Gamma_{is}^q \partial_q^0 X_0^p) x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1 = \\
& = L_X F_{jk}^i x_1^j x_1^k \partial_i^H - F_{jk}^i L_X \Gamma_{si}^p x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1 = (L_X F)^{H\gamma\gamma} - \gamma^3 (L_X \nabla \overset{2}{\bullet} F).
\end{aligned}
$$

Для ковариантных производных векторного поля $F^{H\gamma\gamma}$ верна

Теорема 3.2. *Для произвольного векторного поля* $X \in \Im_0^1(M)$ *и тензорного поля* $F \in \Im_2^1(M)$:

(1) $\nabla_{X^{(1)}}^{(0)} F^{H\gamma\gamma} = (F \overset{1}{\circ} X + F \overset{2}{\circ} X)^{H\gamma}$;

(2) $\nabla_{X^{(0)}}^{(0)} F^{H\gamma\gamma} = (\nabla_X F + F \overset{1}{\bullet} \nabla X + F \overset{2}{\bullet} \nabla X)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3 (\hat{R}(, X) \overset{1}{\bullet} F)$.

Доказательство этих тождеств проведем, используя естественные локальные координаты на $T(M)$.

Применяя определение вертикального и полного лифтов векторных полей, а также полного лифта линейной связности ∇, будем иметь

(1) $\nabla^{(0)}_{X^{(1)}} F^{H\gamma\gamma} = \nabla^{(0)}_{X_0^q \partial_q^1} (F^i_{jk} x_1^j x_1^k \partial_i^0 - F^i_{jk} \Gamma^p_{is} x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1) =$

$$= X_0^q (F^i_{qk} x_1^k \partial_i^0 - F^i_{qk} x_1^k \Gamma^p_{is} x_1^s \partial_p^1 + F^i_{kq} x_1^k \partial_i^0 - F^i_{kq} x_1^k \Gamma^p_{is} x_1^s \partial_p^1) = (F \overset{1}{\circ} X + F \overset{2}{\circ} X)^{H\gamma}.$$

(2) Используя равенства $\partial_q F^i_{jk} = \nabla_q F^i_{jk} - F^p_{jk} \Gamma^i_{pq} + F^i_{pk} \Gamma^p_{jq} + F^i_{jp} \Gamma^p_{qk}$ и $\partial_s X^q = \nabla_s X^q - X^p \Gamma^q_{ps}$, получаем:

$$\nabla^{(0)}_{X^{(0)}} F^{H\gamma\gamma} = \nabla^{(0)}_{X_0^q \partial_q^0 + X_1^q \partial_q^1} (F^i_{jk} x_1^j x_1^k \partial_i^0 - F^i_{jk} \Gamma^p_{is} x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1) = X_0^q (\partial_q^0 F^p_{jk} +$$

$$+ F^i_{jk} \Gamma^p_{qi}) x_1^j x_1^k \partial_p^0 + X_0^q (F^i_{jk} \partial_s^0 \Gamma^p_{qi} - \partial_q^0 F^i_{jk} \Gamma^p_{is} - F^i_{jk} \partial_q^0 \Gamma^p_{is} - F^i_{jk} \Gamma^m_{is} \Gamma^p_{qm}) x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1 +$$

$$+ \partial_s^0 X_0^q x_1^s (F^i_{qk} + F^i_{kq}) x_1^k \partial_i^0 + \partial_s^0 X_0^q x_1^s (F^i_{jk} \Gamma^p_{qi} - F^i_{qk} \Gamma^p_{ij} - F^i_{kq} \Gamma^p_{ij} - F^i_{jk} \Gamma^p_{iq}) x_1^k x_1^j \partial_p^1 =$$

$$= X_0^q \partial_q^0 F^i_{jk} x_1^j x_1^k \partial_i^H + X_0^q F^i_{jk} \Gamma^p_{qi} x_1^j x_1^k \partial_p^0 + \partial_s^0 X_0^q x_1^s F^i_{qk} x_1^k \partial_i^H + \partial_s^0 X_0^q x_1^s F^i_{kq} x_1^k \partial_i^H +$$

$$+ X_0^q F^i_{jk} (\partial_s^0 \Gamma^p_{qi} - \partial_q^0 \Gamma^p_{is} - \Gamma^m_{is} \Gamma^p_{qm}) x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1 = X_0^q \nabla_q^0 F^i_{jk} x_1^j x_1^k \partial_i^H +$$

$$+ \nabla_s^{(0)} X_0^q x_1^s F^i_{qk} x_1^k \partial_i^H + \nabla_s^{(0)} X_0^q x_1^s F^i_{kq} x_1^k \partial_i^H + X_0^q F^i_{jk} R^p_{isq} x_1^j x_1^k x_1^s \partial_p^1 =$$

$$= (\nabla_X F + F \overset{1}{\bullet} \nabla X + F \overset{2}{\bullet} \nabla X)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3 (\hat{R}(\,\hat{}\,, X) \overset{1}{\bullet} F).$$

Теорема 3.3. *Для любых* $X \in \Im_0^1(M)$, $F \in \Im_2^1(M)$*:*

(1) $\nabla^{(0)}_{F^{H\gamma\gamma}} X^{(1)} = \gamma\gamma(\nabla X \overset{1}{\bullet} F)$;

(2) $\nabla^{(0)}_{F^{H\gamma\gamma}} X^{(0)} = (\nabla X \overset{1}{\bullet} F)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3 (\nabla^2 X \overset{1}{\bullet} F)$.

Доказательство. Линейная связность ∇ не имеет кручения, ее полный лифт $\nabla^{(0)}$ также не имеет кручения, то есть ее тензорное поле $\tilde{T}$ кручения равно 0. Поэтому $\tilde{T}(F^{H\gamma\gamma}, X^{(1)}) = 0$, и $\nabla^{(0)}_{F^{H\gamma\gamma}} X^{(1)} = \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} F^{H\gamma\gamma} + [F^{H\gamma\gamma}, X^{(1)}]$. На основании равенств (1) теорем 3.1 и 3.2 получим

$$\nabla^{(0)}_{F^{H\gamma\gamma}} X^{(1)} = (F \overset{1}{\circ} X + F \overset{2}{\circ} X)^{H\gamma} - (F \overset{1}{\circ} X + F \overset{2}{\circ} X)^{H\gamma} + \gamma\gamma(\nabla X \overset{1}{\bullet} F) = \gamma\gamma(\nabla X \overset{1}{\bullet} F).$$

Аналогично доказывается второе равенство. Так как $\tilde{T}(F^{H\gamma\gamma}, X^{(0)}) = 0$, то $\nabla^{(0)}_{F^{H\gamma\gamma}} X^{(0)} = \nabla^{(0)}_{X^{(0)}} F^{H\gamma\gamma} + [F^{H\gamma\gamma}, X^{(0)}]$. Из равенств (2) теорем 3.1 и 3.2 и из того, что $L_X \nabla \overset{2}{\bullet} F = \nabla^2 X \overset{1}{\bullet} F - \hat{R}(\,\hat{}\,, X) \overset{1}{\bullet} F$, будем иметь

$$\nabla^{(0)}_{F^{H\gamma\gamma}} X^{(0)} = (\nabla_X F + F \overset{1}{\bullet} \nabla X + F \overset{2}{\bullet} \nabla X)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3 (\hat{R}(F, X)) - (L_X F)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3 (L_X \nabla \overset{2}{\bullet} F) =$$

$$= (\nabla X \overset{1}{\bullet} F)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3 (\hat{R}(\,\hat{}\,, X) \overset{1}{\bullet} F + \nabla^2 X \overset{1}{\bullet} F - \hat{R}(\,\hat{}\,, X) \overset{1}{\bullet} F) = (\nabla X \overset{1}{\bullet} F)^{H\gamma\gamma} + \gamma^3 (\nabla^2 X \overset{1}{\bullet} F).$$

4. Лифты $H\gamma^r$ тензорных полей типа (1, *r*) (r $\geqslant$ 1) и их свойства

Определение лифтов $H\gamma$, $H\gamma\gamma = H\gamma^2$ распространим на общий случай. Рассмотрим равенство вида

$$K^{H\gamma^r} = (K^i_{j_1 \ldots j_r})_{(0)} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial_i^H . \tag{4.1}$$

Убедимся, что выражение, стоящее в правой части равенства (4.1), не зависит от выбора локальной системы координат на $T(M)$.

Пусть $(\pi^{-1}(V), \overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)$ – другая локальная карта такая, что $(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \varnothing$. Используя формулы (1.2) и (2.7) и подставляя их в $K^{H\gamma^r}$, получим

$$(K^i_{j_1\dots j_r})_{(0)} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^H = \left(\overline{K}^q_{k_1\dots k_r}\right)_{(0)} \cdot \overline{x}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \overline{x}_1^{k_r} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^q} \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^i}\right)_{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^s}\right)^H =$$

$$= (\overline{K}^s_{k_1\dots k_r})_{(0)} \overline{x}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \overline{x}_1^{k_r} \overline{\partial}_s^H.$$

Таким образом, $K^{H\gamma^r}$ не зависит от выбора локальных координат на $T(M)$ и является векторным полем.

Определение 4.1. *Отображение* $H\gamma^r : \Im_r^1(M) \to \Im_0^1(T(M))$, *задаваемое условием (4.1), называется* $H\gamma^r$ *-лифтом тензорного поля* $K \in \Im_0^1(M)$.

Рассмотрим свойства $H\gamma^r$ -лифтов.

Теорема 4.1. *Для любых* $X \in \Im_0^1(M), K \in \Im_r^1(M)$:

(1) $L_{X^{(1)}} K^{H\gamma^r} = (K \overset{1}{\circ} X + \dots + F \overset{r}{\circ} X)^{H\gamma^{r-1}} - \gamma^r (\nabla X \overset{1}{\bullet} K)$;

(2) $L_{X^{(0)}} K^{H\gamma^r} = (L_X K)^{H\gamma^r} - \gamma^{r+1} (L_X \nabla \overset{2}{\bullet} K)$.

Доказательство. Учитывая, что производная Ли $L_{\tilde{X}} K^{H\gamma^r} = [\tilde{X}, K^{H\gamma^r}]$ вдоль векторного поля $\tilde{X}$ от векторного поля $K^{H\gamma^r}$ есть скобка Ли $[\tilde{X}, K^{H\gamma^r}]$ векторных полей, используя естественные локальные координаты на $T(M)$, получим:

$$(1)\ L_{X^{(1)}} F^{H\gamma\gamma} = [X_0^q \partial_q^1, K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^0 - K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \Gamma^p_{is} x_1^s \partial_p^1] =$$

$$= X_0^q ((K^i_{qj_1\dots j_{r-1}} + K^i_{j_1 q\dots j_{r-1}}) x_1^{j_1} \dots x_1^{j_{r-1}} \partial_i^0 - (K^i_{qj_1\dots j_{r-1}} + K^i_{j_1 q\dots j_{r-1}}) \Gamma^p_{is} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_{r-1}} x_1^s \partial_p^1 -$$

$$- K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^0 X_0^q \partial_q^1 - X_0^q K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \Gamma^p_{iq} \partial_p^1 = (K \overset{1}{\circ} X + \dots + K \overset{r}{\circ} X)^{H\gamma^{r-1}} - \gamma^r (\nabla X \overset{1}{\bullet} K).$$

$$(2)\ L_{X^{(0)}} F^{H\gamma\gamma} = [X_0^q \partial_q^0 + X_1^q \partial_q^1, K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^0 - K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \Gamma^p_{is} x_1^s \partial_p^1] =$$

$$= X_0^q \partial_q K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^0 - X_0^q \partial_q K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \Gamma^p_{is} x_1^s \partial_p^1 -$$

$$- X_0^p \partial_p K^q_{j_1 q\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \Gamma^i_{qs} x_1^s \partial_i^1 - \partial_q X^i K^q_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_q^0 + X_1^i K^q_{ij_2\dots j_{r-1}} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_{r-1}} \partial_q^0 +$$

$$+ \dots + X_1^i K^q_{j_1\dots j_{r-1} i} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r - 1} \partial_q^0 - X_1^i K^q_{ij_2\dots j_{r-1}} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_{r-1}} \Gamma^p_{qs} x_1^s \partial_p^1 - \dots -$$

$$- X_1^i K^q_{j_1\dots j_{r-1} i} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r - 1} \Gamma^p_{qs} x_1^s \partial_p^1 - X_1^p \Gamma^q_{ip} K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_q^1 - K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^0 X_0^q \partial_q^1 -$$

$$- \partial_p^0 X_0^q K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} x_1^s \Gamma^p_{is} \partial_q^1 = (X_0^q \partial_q K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^H + X_1^i K^q_{ij_2\dots j_{r-1}} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_{r-1}} \partial_q^H +$$

$$+ \dots + X_1^i K^q_{j_1\dots j_{r-1} i} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r - 1} \partial_q^H - \partial_q X^i K^q_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_q^0) + (- X_1^p \Gamma^q_{ip} K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_q^1 -$$

$$- K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \partial_i^0 X_0^q \partial_q^1 - \partial_p^0 X_0^q K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} x_1^s \Gamma^p_{is} \partial_q^1 - X_0^p \partial_p K^q_{j_1 q\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} \times$$

$$\times \Gamma^i_{qs} x_1^s \partial_i^1) = (L_X K)^{H\gamma^r} + K^i_{j_1\dots j_r} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} x_1^s (- \partial_p X^i \Gamma^p_{is} - X^p \partial_p \Gamma^q_{is} -$$

$$- \partial_s X^p \Gamma^q_{ip} - \partial_i \partial_s X^q + \partial_p X^q \Gamma^p_{is}) \partial_q^1 = (L_X K)^{H\gamma^r} - \gamma^{r+1} (L_X \nabla \overset{2}{\bullet} F).$$

Теорема 4.2. *Имеют место следующие тождества:*

(1) $\nabla^{(0)}_{X^{(1)}} K^{H\gamma^r} = (K \overset{1}{\circ} X + \ldots + K \overset{r}{\circ} X)^{H\gamma^{r-1}}$;

(2) $\nabla^{(0)}_{X^{(0)}} K^{H\gamma^r} = (\nabla_X K + K \overset{1}{\bullet} \nabla X + \ldots + K \overset{r}{\bullet} \nabla X)^{H\gamma^r} + \gamma^{r+1}(\hat{R}(\overset{\wedge}{\ },X) \overset{1}{\bullet} K)$ для любых $X \in \Im^1_0(M)$, $K \in \Im^1_r(M)$.

Докажем данные равенства, используя локальные координаты на $T(M)$.

$$(1)\ \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} K^{H\gamma^r} = \nabla^{(0)}_{X^q_0 \partial^1_q} K^i_{j_1\ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^H_i = X^q_0((K^i_{qj_1\ldots j_{r-1}} + \ldots + K^i_{j_1\ldots j_{r-1}q}) x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_{r-1}} \partial^0_i -$$

$$-(K^i_{qj_1\ldots j_{r-1}} + \ldots + K^i_{j_1\ldots j_{r-1}q}) \Gamma^p_{ij_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_{r-1}} x_1^{j_r} \partial^1_p = (K \overset{1}{\circ} X + \ldots + K \overset{r}{\circ} X)^{H\gamma^{r-1}};$$

$$(2)\ \nabla^{(0)}_{X^{(0)}} K^{H\gamma^r} = \nabla^{(0)}_{X^q_0 \partial^0_q + X^q_1 \partial^1_q} (K^i_{j_1\ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^H_i \partial^0_i - K^i_{j_1\ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^H_i \Gamma^p_{is} x_1^s \partial^1_p) =$$

$$= X^q_0(\partial^0_q K^p_{j_1\ldots j_r} + + K^i_{j_1\ldots j_r} \Gamma^p_{qi}) x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^0_p + X^q_0(K^i_{j_1\ldots j_r} \partial^0_s \Gamma^p_{qi} - \partial^0_q K^i_{j_1\ldots j_r} \Gamma^p_{is} -$$

$$-K^i_{j_1\ldots j_r} \partial^0_q \Gamma^p_{is} - K^i_{j_1\ldots j_r} \Gamma^m_{is} \Gamma^p_{qm}) x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^1_p + \partial^0_s X^q_0 x_1^s (K^i_{qj_1\ldots j_{r-1}} + \ldots + K^i_{j_1\ldots j_{r-1}q}) \times$$

$$\times x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_{r-1}} \partial^0_i + \partial^0_s X^q_0 x_1^s (K^i_{j_1\ldots j_r} \Gamma^p_{qi} - K^i_{qj_1\ldots j_{r-1}} \Gamma^p_{ij} - \ldots - K^i_{j_1\ldots j_{r-1}q} \Gamma^p_{ij} - K^i_{j_1\ldots j_r} \Gamma^p_{iq}) \times$$

$$\times x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^1_p = X^q_0 \partial^0_q K^i_{j_1\ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^H_i + X^q_0 K^i_{j_1\ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \Gamma^p_{qi} \partial^0_p +$$

$$+\partial^0_s X^q_0 x_1^s (K^i_{qj_1\ldots j_{r-1}} + \ldots + K^i_{j_1\ldots j_{r-1}q}) x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_{r-1}} \partial^H_i + X^q_0 K^i_{j_1\ldots j_r} (\partial^0_s \Gamma^p_{qi} -$$

$$-\partial^0_q \Gamma^p_{is} - \Gamma^m_{is} \Gamma^p_{qm}) x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} x_1^s \partial^1_p = X^q_0 \nabla^{(0)}_q K^i_{j_1\ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} \partial^H_i + \nabla^{(0)}_s X^q_0 x_1^s (K^i_{qj_1\ldots j_{r-1}} + \ldots +$$

$$+K^i_{j_1\ldots j_{r-1}q}) x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_{r-1}} \partial^H_i + X^q_0 K^i_{j_1\ldots j_r} x_1^{j_1} \ldots x_1^{j_r} R^p_{isq} x_1^s \partial^1_p = (\nabla_X F + F \overset{1}{\bullet} \nabla X + \ldots +$$

$$+F \overset{r}{\bullet} \nabla X)^{H\gamma\gamma} + \gamma^{r+1}(\hat{R}(\overset{\wedge}{\ },X) \overset{1}{\bullet} K).$$

Теорема 4.3. *Для любых* $X \in \Im^1_0(M)$, $K \in \Im^1_r(M)$:

(1) $\nabla^{(0)}_{K^{H\gamma^r}} X^{(1)} = \gamma^r(\nabla X \overset{1}{\bullet} K)$;

(2) $\nabla^{(0)}_{K^{H\gamma^r}} X^{(0)} = (\nabla X \overset{1}{\bullet} K)^{H\gamma^r} + \gamma^{r+1}(\nabla^2 X \overset{1}{\bullet} K)$.

Доказательство. (1) Так как тензорное поле $\tilde{T}$ кручения полного лифта $\nabla^{(0)}$ связности ∇ равно нулю, то есть $\tilde{T}(K^{H\gamma^r}, X^{(1)}) = 0$, то

$$\nabla^{(0)}_{K^{H\gamma^r}} X^{(1)} = \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} K^{H\gamma^r} + [K^{H\gamma^r}, X^{(1)}].$$

На основании равенств (1) и теорем 4.1 и 4.2 будем иметь

$$\nabla^{(0)}_{K^{H\gamma^r}} X^{(1)} = (K \overset{1}{\circ} X + \ldots + K \overset{r}{\circ} X)^{H\gamma^{r-1}} - (K \overset{1}{\circ} X + \ldots + F \overset{r}{\circ} X)^{H\gamma^{r-1}} + \gamma^r(\nabla X \overset{1}{\bullet} K) = \gamma^r(\nabla X \overset{1}{\bullet} K).$$

(2) Так как $\tilde{T}(K^{H\gamma^r}, X^{(0)}) = 0$, то $\nabla^{(0)}_{K^{H\gamma^r}} X^{(0)} = \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} K^{H\gamma^r} + [K^{H\gamma^r}, X^{(0)}]$.

Используя равенства (2) теорем 4.1 и 4.2, получим:

$$\nabla^{(0)}_{K^{H\gamma^r}} X^{(0)} = (\nabla_X K + K \overset{1}{\circ} \nabla X + \ldots + K \overset{r}{\circ} \nabla X)^{H\gamma^r} + \gamma^{r+1}(\hat{R}(K,X)) - (L_X K)^{H\gamma^r} +$$

$$+\gamma^{r+1}(L_X \nabla \overset{2}{\bullet} K) = (\nabla X \overset{1}{\bullet} K)^{H\gamma^r} + \gamma^{r+1}(\hat{R}(\overset{\wedge}{\ },X) \overset{1}{\bullet} K + \nabla^2 X \overset{1}{\bullet} K - \hat{R}(\overset{\wedge}{\ },X) \overset{1}{\bullet} K) =$$

$$= (\nabla X \overset{1}{\bullet} K)^{H\gamma^r} + \gamma^{r+1}(\nabla^2 X \overset{1}{\bullet} K).$$

Список литературы

1. *Каган Ф. И.* Каноническое разложение проективно-киллинговых и аффинно-киллинговых векторов на касательном расслоении // Матем. заметки. 1976. № 19:2. С. 247—258.

2. *Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения линейных реперов со связностью полного лифта // Труды геометрического семинара. 1994. Вып. 22. С. 78—88.

3. *Шадыев Х.* Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Тр. геом. сем. 1984. Вып. 16. С. 117—127.

4. *Sato K.* Infinitesimal affine transformations of the tangent bundles with Sasaki metric // Tôhoku Math. Jourr. 1974. № 26. P. 353–361.

5. *Tanno S.* Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric // Tensor, N. S. 1974. Vol. 28. P. 139–144.

6. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles // Marcel Dekker, Inc. N. Y., 1973. P. 12–25.

Об авторе

Галия Алиевна Султанова — асп., Пензенский государственный университет, Пенза.

E-mail: sultgaliya@yandex.ru

About the author

Galiya Sultanova — PhD student, Penza State University, Penza.

E-mail: sultgaliya@yandex.ru

УДК 514.75